

Β' Μέρος Τέστ 5, Μιγαδικές Συναρτήσεις I

Διάρκεια 60 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

**Θέμα 1**

Να δοθεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z^4 + (2 - 3i)z^3 - 6iz^2 + 2}{z(z + 2)}$$

σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο  $z_0 = 1$ .

**Θέμα 2**

(i) Να αποδείξετε ότι

$$f(z) = \log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad z \in D(0, 1).$$

(ii) Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{3^n n}$ .

(iii) Αν  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  και  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n/2}}{3^n n} \cos(n\theta) = \ln 3 - \frac{\ln 2}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n/2}}{3^n n} \sin(n\theta) = \frac{\pi}{4}.$$

(iv) Για  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z| < 1$  να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)).$$

**Θέμα 3** (Σωστό ή Λάθος;)

(i) Η δυναμοσειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο  $\bar{D}(0, r) \subset \mathbb{C}$ , όπου  $0 < r < 2$ .

(ii) Η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (k\pi)^n$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$  ισούται πάντα με 1.

(iii) Το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $f(z) = \frac{z^3}{1-z^2}$  είναι το  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n+1}$ ,  $|z| < 1$ .

(iv) Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-i)^n)$  συγκλίνει.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!